



TITLE:

# 相互作用を考慮した球形気泡離散モデルの解析: 気泡流の音響特性 (非線形波動研究の数理, モデリングおよび応用)

AUTHOR(S):

川原, 潤也; 小林, 一道; 渡部, 正夫

---

CITATION:

川原, 潤也 ...[et al]. 相互作用を考慮した球形気泡離散モデルの解析: 気泡流の音響特性 (非線形波動研究の数理, モデリングおよび応用). 数理解析研究所講究録 2013, 1847: 10-15

ISSUE DATE:

2013-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/195075>

RIGHT:

## 相互作用を考慮した球形気泡離散モデルの解析 (気泡流の音響特性)

### Analysis of Discrete Model of Spherical Bubbles with Interaction (Acoustic Characteristics of Bubbly Liquids)

北海道大学 大学院工学院 川原潤也 (Junya KAWAHARA)  
北海道大学 大学院工学研究院 小林一道 (Kazumichi KOBAYASHI)  
北海道大学 大学院工学研究院 渡部正夫 (Masao WATANABE)  
Graduate School of Engineering, Hokkaido University

#### 1. 緒 言

液体中の気泡群の存在が、混相液中の音速、分散などの音響特性に影響を及ぼすことはよく知られており、気泡群の音響特性に関する研究は多数存在する [1-7]。気泡群の音響特性を巨視的な視点から解析するために、気液二相流の連続体モデルの平均化方程式を用いた数学モデルが導出され [1, 2]、実験結果とよい一致を示すことが検証されている [3]。一方で、個々の気泡の挙動を記述する気泡群の離散モデルが提案されており [4, 5]、離散モデルを用いた解析や直接数値計算により、気泡流の連続体モデルの音響特性について議論する研究例も報告されている [6, 7]。

本研究では、気泡間の相互作用を考慮した多数の球形気泡の離散モデルの解析により、気泡流の連続体モデルの音響特性の有効限界を議論することを目的とする。本報では、剛体壁で囲まれた直方体領域内に分散する多数の球形気泡と音波の干渉問題を、離散モデル [5] を用いて数値計算する。得られた計算結果を用いて、気泡群の存在が圧力波の伝播に及ぼす影響を調べ、連続体モデル [1, 2] に基づく圧力波の伝播速度との比較検討を行う。

#### 2. 計算条件と数学モデル

図 1 に示すように、圧縮・非粘性液体で満たされた直方体領域内に球形音源および 5 個の三次元球形気泡を配置する。球形音源から放射される音波と多数の球形気泡の干渉問題を考える。音源と気泡は等間隔  $L$  で配置し、気泡の球形変形運動のみを考慮し、並進運動を無視する。剛体壁を  $y = \pm L$  および  $z = \pm L$  に配置する。音源と気泡は、 $x$  軸から  $\Delta y = 0.70$  mm,  $\Delta z = 4.00$  mm ずらした軸上に一列に配置する。気泡は初期静止状態にあるものとする。気泡内には蒸気と非凝縮性気体が入っているものとし、蒸気の圧力  $p_v$  は一定とする。等温の気液二相媒体において定義される伝播速度と比較するため、非凝縮性気体の状態変化は等温変化に従うものとする。音源と各気泡の初期半径は  $R_0 = 1.00$  mm とする。音源は半径のみが  $R = R_0 - A \sin(\omega t)$  で正弦振動する脈動球として考え、振幅  $A = 1.00 \times 10^{-3}$  mm, 振動数  $\omega = 1.06$  kHz, 波長  $\lambda = 1.40 \times 10^3$  mm とする。ボイド率は、隣接する気泡間の中心を中心とする体積  $2L \times 2L \times L$  の領

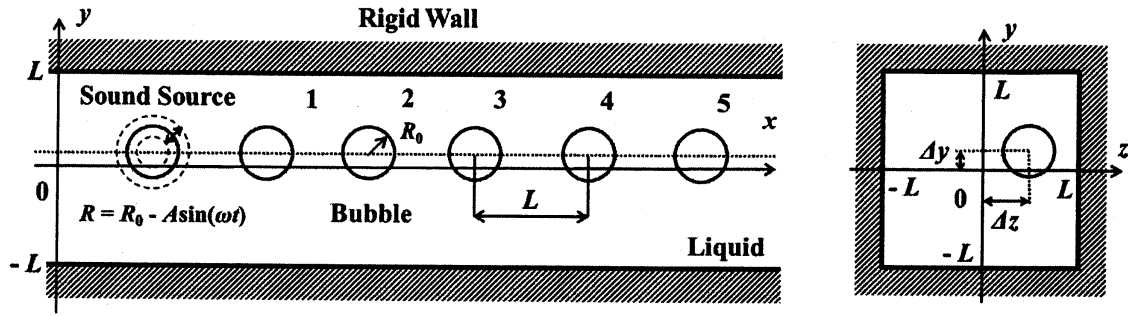


Fig. 1 Schematic of computational domain.

域内における気泡体積率で定義する。したがって、気泡初期半径におけるボイド率  $\alpha_0$  は、

$$\alpha_0 = \frac{4\pi R_0^3/3}{2L \times 2L \times L} \quad (1)$$

で定義される。本研究では  $L$  を変化させることで、異なるボイド率での計算を行う。剛体壁は鏡像法により考え、音源および各気泡につき、鏡像音源または鏡像気泡をそれぞれ224個ずつ配置することで近似的に扱う。また、流れは渦なしを仮定し、外部からの強制的な圧力変動は考えないものとする。

計算には、高比良ら[5]の多数の球形気泡の運動方程式を用いる:

$$R_I(t)\ddot{R}_I(t)\left[1 - \frac{2\dot{R}_I(t)}{a_\infty}\right] + \frac{3}{2}\dot{R}_I^2(t)\left[1 - \frac{4\dot{R}_I(t)}{3a_\infty}\right] + \sum_{J=1, J \neq I}^N \frac{R_J(\zeta_{IJ})}{L_{IJ}} [R_J(\zeta_{IJ})\ddot{R}_J(\zeta_{IJ}) + 2\dot{R}_J^2(\zeta_{IJ})] - h_{Iw}(t) - \frac{R_I(t)}{a_\infty} \dot{h}_{Iw}(t) = 0 \quad (2)$$

ここで、 $t$  は時間、 $a$  は液単相音速を表す。下添え字  $\infty$  は無限遠方での量を表し、それらはすべて定数であるとする。下添え字  $I$  と  $J$  は気泡番号を表し ( $I, J = 1, 2, \dots, N, I \neq J$ )、 $R$  は気泡半径、 $L_{IJ}$  は気泡  $IJ$  中心間距離、 $\zeta_{IJ} = t - [L_{IJ} - R_I(\zeta_{IJ})]/a_\infty$  は相互干渉の時間遅れを表す。また、 $h_{Iw}$  は気泡壁と無限遠方とのエンタルピーの差

$$h_{Iw}(t) = \frac{n}{n-1} \frac{p_\infty + B}{\rho_\infty} \left\{ \left[ \frac{p_{Iw}(t) + B}{p_\infty + B} \right]^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right\} \quad (3)$$

で表現される。ここで、 $n$  と  $B$  は物性値 (20 °C の水の場合  $n = 7.15$ ,  $B = 304.70$  MPa),  $p$  は液体圧力、 $\rho$  は液体密度を表す。式 (3) の  $p_{Iw}$  は気泡壁圧力で以下の式で与えられる:

$$p_{Iw}(t) = p_v + \left( p_\infty - p_v + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left[ \frac{R_0}{R_I(t)} \right]^{3\gamma} - \frac{2\sigma}{R_I(t)} \quad (4)$$

ここで、 $\sigma$  は表面張力係数、 $\gamma$  はポリトロップ指数を表す。液体圧力  $p$  は気泡  $I$  の速度ポテンシャル

$$\varphi_I(r_I, t) = \frac{R_I^2(\zeta_I)}{r_I} \left\{ -\dot{R}_I(\zeta_I) + \frac{1}{a_\infty} [R_I(\zeta_I)\ddot{R}_I(\zeta_I) + 2\dot{R}_I^2(\zeta_I)] \right\} \quad (5)$$

を用いて次のように表現される。

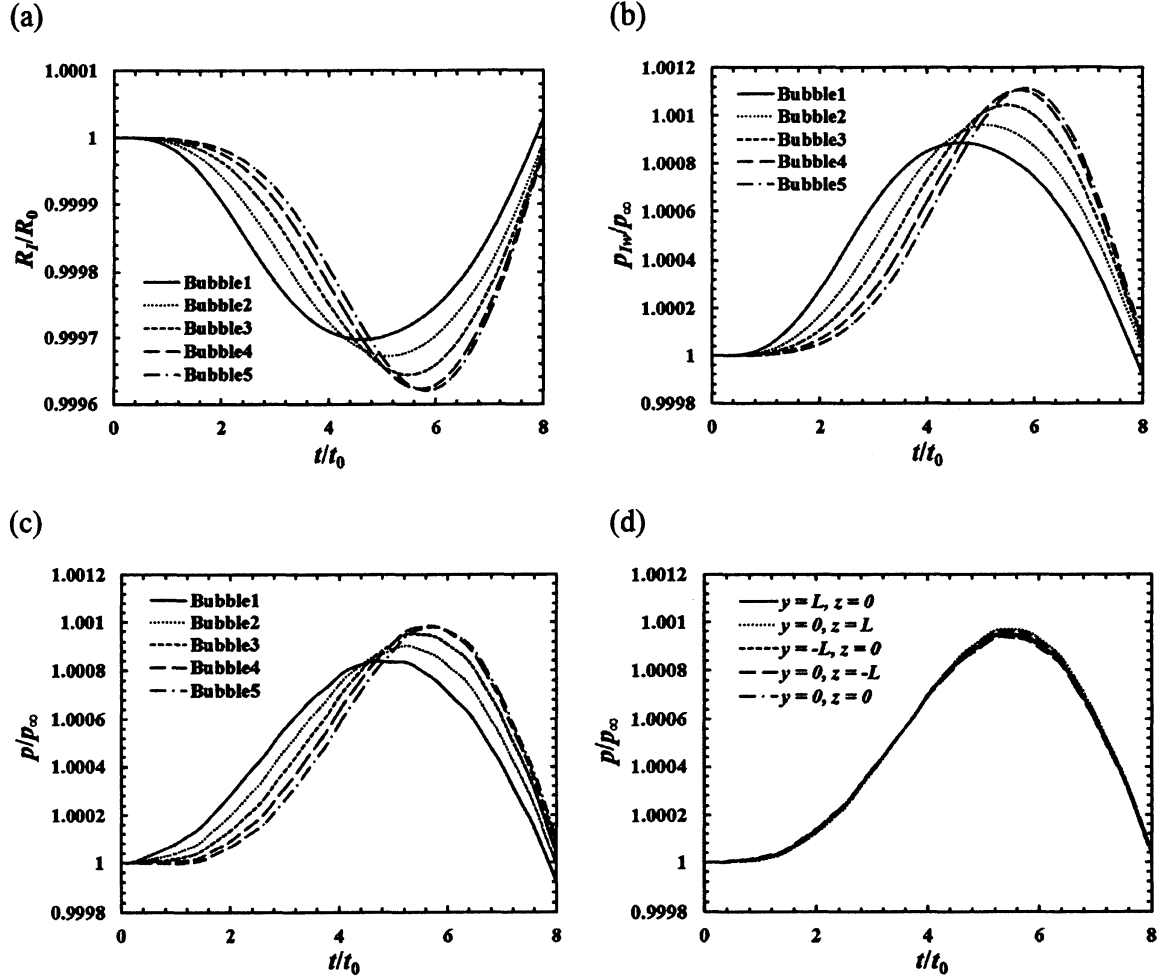


Fig. 2 Time histories of (a) bubble radii (b) pressures at the bubble walls (c) pressures in the liquid at  $(y, z) = (L, 0)$  (d) pressures in the liquid at  $y$ - $z$  plane (bubble3) for  $\alpha_0 = 1.05 \times 10^{-3}$ .

$$p(r_I, t) = p_\infty - \sum_{I=1}^N \rho_\infty \frac{\partial \phi_I(r_I, t)}{\partial t} \quad (6)$$

ここで、 $r_I$ は気泡  $I$  の中心からの距離、 $\zeta_I = t - [r_I - R(\zeta_I)]/a_\infty$  は気泡  $I$  からの干渉の時間遅れを表す。式 (2) は、気泡間の相互作用を考慮した多数の球形気泡の運動を記述する離散モデルである。計算条件は、 $a_\infty = 1483.00$  m/s,  $p_\infty = 101.30$  kPa,  $\rho_\infty = 998.20$  kg/m<sup>3</sup>,  $p_v = 2.337$  kPa,  $\sigma = 70.61 \times 10^{-3}$  N/m,  $\gamma = 1.00$  (20 ℃の水を想定) とし、数値解法には Runge-Kutta 法を用いる。

### 3. 計算結果

本報では、 $\alpha_0 = 1.05 \times 10^{-3}$  ( $L = 10.00$  mm) の結果 (図 2) と  $\alpha_0 = 1.31 \times 10^{-4}$  ( $L = 20.00$  mm) の結果 (図 3) について述べる。図 (a) に各気泡の気泡半径の時間履歴、図 (b) に各気泡の気泡壁圧力の時間履歴を示す。また、図 (c) に  $x$  座標を各気泡の中心の  $x$  座標とし、 $y$ - $z$  座標を  $(y, z) = (L, 0)$  とする 5 点の液体圧力の時

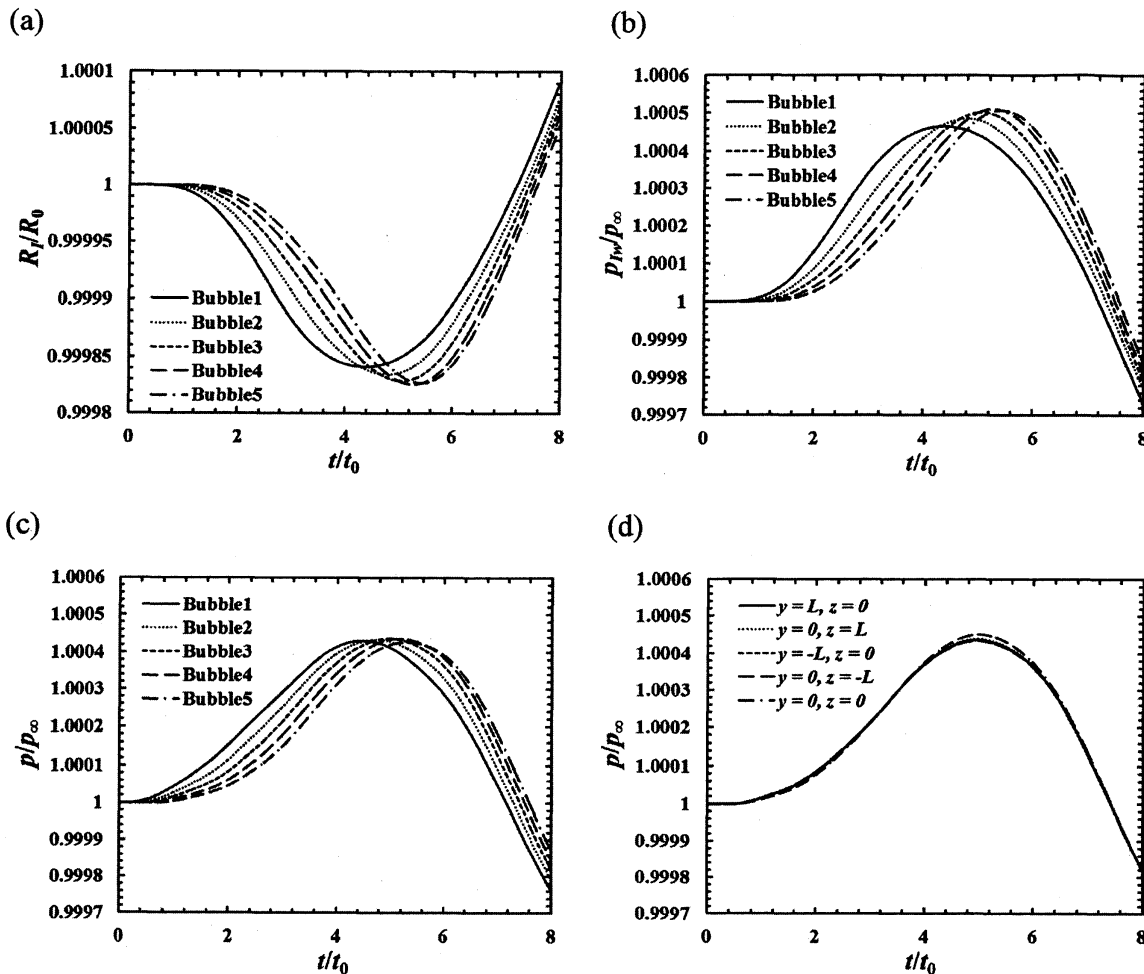


Fig. 3 Time histories of (a) bubble radii (b) pressures at the bubble walls (c) pressures in the liquid at  $(y, z) = (L, 0)$  (d) pressures in the liquid at y-z plane (bubble3) for  $\alpha_0 = 1.31 \times 10^{-4}$ .

間履歴, 図 (d) に  $x$  座標を気泡 3 の中心の  $x$  座標とし,  $y$ - $z$  座標を  $(y, z) = (L, 0), (0, L), (-L, 0), (0, -L), (0, 0)$  とする 5 点の液体圧力の時間履歴を示す. 図 (a) の縦軸は無次元半径, 横軸は無次元時間であり, 図 (b) から (d) の縦軸は無次元圧力, 横軸は無次元時間である. 半径, 圧力, 時間はそれぞれ  $R_0$ ,  $p_\infty$ ,  $t_0 = R_0/(p_\infty/\rho_\infty)^{1/2}$  で無次元化されている.

図 2(a) より, 音波の伝播に伴って気泡 1 から 5 が順に収縮を開始し, 一定時間経過すると極小半径に達する. 図 2 (b) より, 気泡壁圧力は, 気泡が極小半径となったときに極大値をとる. 図 2 (c) で示される壁面上の液体圧力変動は, 気泡振動と関連しており, 各点に最も近い気泡の気泡壁圧力が極大となったときに極大値をとる. この圧力変動から, 領域内を伝播する圧力波が確認できる. 図 2(d) は気泡 3 中心の  $x$  座標における  $y$ - $z$  断面の液体圧力分布を示しており, 同断面内の液体圧力変動が一様であることがわかる. 他の  $y$ - $z$  断面についても同条件で計算を行ったところ, 図 2 (d) と同様に液体圧力変動が  $y$ - $z$  断面内で一様であることが確認できた. 図 3 (a) から (d) についても, 図 2 と同様の結果を示している. このことから, ボイド率に関わらず, 領域内を伝播する圧力波は一次元であると考えられる.

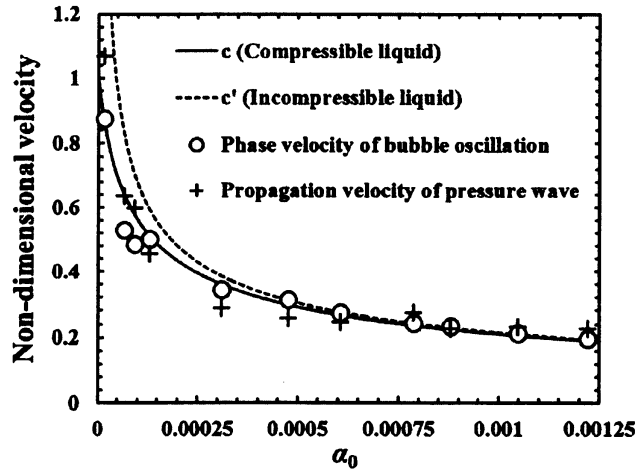


Fig. 4 Relation between void fraction and the propagation velocities of the pressure waves.

#### 4. 連続体モデルの音響特性との比較

各気泡の気泡壁圧力が極大になる時間と中心の  $x$  座標の関係に最小二乗法を適用して得られる直線の傾きを“気泡運動の位相速度”とよぶ。この位相速度および領域内を伝播する圧力波の伝播速度と、気液二相流の連続体モデルの平均化方程式で議論される圧力波の伝播速度を比較する。領域内を伝播する圧力波の伝播速度は、図 (c) と同条件で計算した 5 点の液体圧力変動にローパスフィルタを通した波形が極大になる時間と、各点の  $x$  座標の関係に最小二乗法を適用して得られる直線の傾きから見積もる。気液二相流の連続体モデルには、液相の圧縮性を考慮した Egashira ら [2] の二流体モデル方程式系を用い、同モデルに長波長極限をとることで得られる圧力波の伝播速度

$$c = \sqrt{\frac{(2\pi\omega_B R_0)^2 + \frac{3\alpha_0}{1-\alpha_0} \frac{1-\alpha_0+\beta}{\beta} \gamma \frac{p_\infty + 2\sigma/R_0}{\rho_\infty}}{(1-\alpha_0) \left[ \left( \frac{2\pi\omega_B R_0}{a_\infty} \right)^2 + \frac{3\alpha_0}{1-\alpha_0} \right]}} \quad (7)$$

と比較する。ここで、 $\omega_B$  は単一気泡の固有振動数であり、以下の式で与えられる：

$$\omega_B = \frac{1}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{3\gamma}{\rho_\infty} \left( p_\infty + \frac{2\sigma}{R_0} \right) - \frac{2\sigma}{\rho_\infty R_0}} \quad (8)$$

本解析では、半径 1.00 mm の単一気泡の固有振動数  $\omega_B = 2.78$  kHz を用いる。また、 $\beta$  は付加質量係数であり、球形気泡の場合は  $\beta = 1/2$  となる。Egashira らのモデル方程式に、液相非圧縮近似を課し、気泡内気体等温とし、長波長極限をとることで得られる波の伝播速度は、混相流の分野でよく知られる van Wijngaarden [1] の等温平衡音速

$$c' = \sqrt{\frac{p_\infty}{\rho_\infty \alpha_0 (1-\alpha_0)}} \quad (9)$$

にほぼ一致する [2]。

図 4 に解析結果を示す。図 4 の縦軸は  $a_\infty$  で無次元化された無次元速度、横軸はボイド率である。式 (7)

の伝播速度は実線、式 (9) の等温平衡音速は破線により、それぞれの速度とボイド率の関係を示す。気泡運動の位相速度および圧力波の伝播速度と、式 (7) の伝播速度を比較すると、これらがよい一致を示すことがわかる。等温平衡音速はボイド率がゼロに近づくと無限大に発散するのに対して、式 (7) の伝播速度は液単相音速に近づく。両者の違いは液相の圧縮性の効果によるものであり、液相の圧縮性を考慮した離散モデルより得られる圧力波の伝播速度も、ボイド率がゼロに近づくと液単相音速に近い値をとることがわかる。以上のことから、領域内を伝播する圧力波は、連続体モデルより導出される式 (7) と同程度の伝播速度で伝播する一次元波であると考えられる。

## 5. 結 言

本研究では、剛体壁で囲まれた直方体領域内に分散する多数の球形気泡と音波の干渉問題を、気泡間の相互作用を考慮した多数の球形気泡の離散モデルを用いて数値計算した。得られた計算結果から、領域内を伝播する一次元の圧力波が確認された。この一次元波の伝播速度と気泡流の連続体モデルの平均化方程式に基づく圧力波の伝播速度を比較すると、両者がよい一致を示すことがわかった。

## 参考文献

- [1] van Wijngaarden, L., "One-Dimensional Flow of Liquids Containing Small Gas Bubbles", *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **4** (1972), 369-396.
- [2] Egashira, R., Yano, T. and Fujikawa, S., "Linear Wave Propagation of Fast and Slow Modes in Mixtures of Liquid and Gas Bubbles", *Fluid Dyn. Res.*, **34** (2004), 317-334.
- [3] Prosperetti, A., Crum, L. A. and Commander, K. W., "Nonlinear Bubble Dynamics", *J. Acoust. Soc. Am.*, **83** (1988), 502-514.
- [4] 渡部, Prosperetti, "気泡群の音響特性のダイナミックシミュレーション (第1報, 数学モデルの構築)", 日本機械学会論文集 (B編), **69** (2003), 2612-2619.
- [5] 高比良, 山根, 赤松, "音場中での気泡群の非線形振動 (分岐構造)", 日本機械学会論文集 (B編), **59** (1993), 1451-1456.
- [6] 渡部, Prosperetti, "気泡群の音響特性のダイナミックシミュレーション (第2報, 連続体数学モデルの有効限界に関する考察)", 日本機械学会論文集 (B編), **70** (2004), 636-643.
- [7] 二木, 神保, 高比良, "Ghost Fluid 法を用いた気液二相流での圧力波の伝播に関する二次元直接数値計算", 混相流, **25** (2012), 459-467.